Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebraische Zahlentheorie
Blatt 5

Abgabe von: Mein Name
TutorIn: Mein(e) Lieblingstutor(in)

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate des Skriptes der *Algebraischen Zahlentheorie* vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 5.1 **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie die Klassengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

Lösung:

Aufgabe 5.2 **[4 Punkte]**

Sei L ein Zahlkörper des Grades $n := [L : \mathbb{Q}] \in \mathbb{N}$, Ω die normale Hülle von $L/\mathbb{Q}$ und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die paarweise verschiedenen $\mathbb{Q}$-Einbettungen von L in Ω, sodass die ersten s Einbettungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ reell und die weiteren $2t$ Einbettungen $\sigma_{s+1}, \overline{\sigma_{s+1}}, \ldots, \sigma_{s+t}, \overline{\sigma_{s+t}}$ komplex sind für geeignete Zahlen $s, t \in \mathbb{N}_0$ mit $n = s + 2t$. Sei ferner $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von L und betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

mit

$$v_i := (\sigma_1(\alpha_i), \ldots, \sigma_s(\alpha_i), \mathrm{Re}(\sigma_{s+1}(\alpha_i)), \mathrm{Im}(\sigma_{s+1}(\alpha_i)), \ldots, \mathrm{Re}(\sigma_{s+t}(\alpha_i)), \mathrm{Im}(\sigma_{s+t}(\alpha_i))) \in \mathbb{R}^{s+2t}$$

für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass

$$\det(A) = \left(\frac{1}{2}i\right)^t \det(\mathcal{V})$$

mit

$$\mathcal{V} := \begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha_1) & \cdots & \sigma_s(\alpha_1) & \sigma_{s+1}(\alpha_1) & \overline{\sigma_{s+1}(\alpha_1)} & \cdots & \sigma_{s+t}(\alpha_1) & \overline{\sigma_{s+t}(\alpha_1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_1(\alpha_n) & \cdots & \sigma_s(\alpha_n) & \sigma_{s+1}(\alpha_n) & \overline{\sigma_{s+1}(\alpha_n)} & \cdots & \sigma_{s+t}(\alpha_n) & \overline{\sigma_{s+t}(\alpha_n)} \end{pmatrix}$$

gilt.

Lösung:

Aufgabe 5.3 **[2+2 Punkte]**

Sei $0 < d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei.

(a) Sei $d \equiv 2, 3 \mod 4$. Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ unendlich viele Lösungen besitzt.

(b) Sei $d \equiv 1 \mod 4$. Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^2 - dy^2 = 4$ unendlich viele Lösungen besitzt.

Lösung:

Aufgabe 5.4* **[1,5+1,5+1 Punkte]**

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_{m\times n}(R)$. Die Matrix B entsteht durch *elementare Zeilen- bzw. Spaltenumformungen* aus A, falls endlich viele der drei folgenden Operationen hintereinander auf A ausgeführt wurden, um B zu erhalten.

(i) Vertauschen zweier Zeilen bzw. Spalten von A.

(ii) Multiplikation einer Zeile bzw. Spalte von A mit einer Einheit $u \in R^\times$.

(iii) Addition des c-fachen einer Zeile bzw. Spalte i von A zu einer Zeile bzw. Spalte j von A mit $c \in R$ und $i \neq j$.

Sei $\mathrm{Span}(A)$ das durch die Zeilen von A erzeugte Untermodul von R^n.

(a) Zeigen Sie, dass falls B durch eine elementare Zeilenumformung aus A entstanden ist, dann $R^n/\mathrm{Span}(A) \simeq R^n/\mathrm{Span}(B)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass falls B durch eine elementare Spaltenumformung aus A entstanden ist, dann $R^n/\mathrm{Span}(A) \simeq R^n/\mathrm{Span}(B)$ gilt.

(c) Beschreiben Sie die Struktur von $\mathbb{Z}^3/\mathrm{Span}\{(6, 10, 0), (6, 0, 15), (0, 10, 15)\}$ als Produkt zyklischer Gruppen.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 22. Juli 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor / die Tutorin. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.